El Búho Nº 27
Revista Electrónica de la Asociación Andaluza de Filosofía.
D. L: CA-834/97. - ISSN 1138-3569.
Publicado en https://elbuho.revistasaafi.es/

PRUEBA DE LA CONJETURA FUERTE DE GOLDBACH

ANA SOLANS

Dra. en Filosofía y Ciencias de la Educación por la Universidad de Valencia solans7167@gmail.com

Fecha de finalización 19/2/2024

RESUMEN

Este artículo contiene dos pruebas, una indirecta —por introducción del negador, IN, o reducción al absurdo, Abs— y otra directa —por modus tollens, MT—, de la conjetura fuerte de Goldbach en ZF, la teoría de conjuntos de Zermelo-Fraenkel, a partir de la conjetura débil de Goldbach, probada por Harald Andrés Helfgott.

PALABRAS CLAVE

Conjetura fuerte de Goldbach, conjetura débil de Goldbach, esquema axiomático de especificación, axioma de extensionalidad

ABSTRACT

This article contains two proofs, an indirect proof —by the negator introduction rule, IN, or reductio ad absurdum, Abs— and a direct proof —by modus tollens, MT—, of the strong

Goldbach conjecture in ZF, the Zermelo-Fraenkel set theory, from the weak Goldbach conjecture, proved by Harald Andrés Helfgott.

KEYWORDS

Strong Goldbach conjecture, weak Goldbach conjecture, axiom schema of specification, axiom of extensionality

Por el axioma del infinito y el axioma de extensionalidad, existe un único conjunto $\mathbb{N}$ tal que $\mathbb{N}$ es el universo de discurso del sistema estándar de los números naturales.

Por el esquema axiomático de especificación y el axioma de extensionalidad, existe un único conjunto $2\mathbb{N}$ tal que $2\mathbb{N} = \{x \in \mathbb{N} / \exists y \in \mathbb{N}(x = 2y)\}$, donde $0 \in 2\mathbb{N}$ porque $0 \in \mathbb{N}$ —por el primer axioma de Peano— y 0 satisface la propiedad, o relación, $\exists y \in \mathbb{N} (x = 2y)$ en virtud de $0 \in \mathbb{N}$.

Por el esquema axiomático de especificación y el axioma de extensionalidad, sea P el único conjunto cuyos elementos son, exclusivamente, todos los elementos de $\mathbb{N}$ que son números primos, de modo que $P = \{p \in \mathbb{N} / \forall x, y \in \mathbb{N}(x, y < p \rightarrow xy \neq p)\}$.

$(P, \leq)$ es el conjunto P bien ordenado bajo la relación de buen ordenamiento $\leq$, esto es, $(P, \leq) = \{p0, p1, p2, p3,\ldots\}$, donde $x \in \omega$ para todo número x tal que $px \in (P, \leq)$, y $|P| = |\mathbb{N}|$ por el teorema de Euclides.

El Búho Nº 27
Revista Electrónica de la Asociación Andaluza de Filosofía.
D. L: CA-834/97. - ISSN 1138-3569.
Publicado en https://elbuho.revistasaafi.es/

Por la conjetura débil de Goldbach (CDG), probada por Harald Andrés Helfgott, $\exists x, y, z \in P(x + y + z = n)$ para todo número n tal que $n \in 2\mathbb{N}C$ en $\mathbb{N}$ y tal que $n > 5$.

Por la conjetura fuerte de Goldbach (CFG), $\exists x, y \in P(x + y = n)$ para todo número n tal que $n \in 2\mathbb{N}$ y tal que $n > 2$.

Sea $K = \{n \in \mathbb{N} / n \in 2\mathbb{N}C \wedge n > 5\}$ por el esquema axiomático de especificación, donde K es único por el axioma de extensionalidad.

Sea $K^* = \{n \in \mathbb{N} / n \in 2\mathbb{N}C \wedge n > 5 \wedge \exists x, y, z \in P(x + y + z = n)\}$ por el esquema axiomático de especificación, donde K* es único por el axioma de extensionalidad.

Porque CDG es un enunciado verdadero en $\mathbb{N}$, para todo número n tal que $n \in K$ existen tres números px, py y pz tales que px, py, pz $\in (P, \leq) \wedge x, y, z \in \omega \wedge px + py + pz = n$.

$K^* = K$ por el axioma de extensionalidad, ya que $\forall n \in \mathbb{N}(n \in K \leftrightarrow n \in K^*)$ porque CDG es un enunciado verdadero en $\mathbb{N}$.

Por CDG, para todo número n tal que $n \in K \wedge px + py + pz = n \wedge px, py, pz \in (P, \leq) \wedge x, y, z \in \omega \wedge x > 0$ existe un número m tal que $py + pz = m \wedge m \in 2\mathbb{N} \wedge m > 2$ —porque $px > 2$ y, si $px, n \in 2\mathbb{N}C$, entonces $py + pz \in 2\mathbb{N} \wedge py, pz \geq 2$—.

Supóngase que CFG no es un enunciado verdadero en $\mathbb{N}$.

Si CFG no es un enunciado verdadero en $\mathbb{N}$, entonces existe al menos un número m tal que $m \in 2\mathbb{N} \wedge m > 2 \wedge \forall q, r \in \mathbb{N}(q + r = r + q = m \wedge q \in P \rightarrow r \notin P)$, esto es, existe al menos un

El Búho Nº 27
Revista Electrónica de la Asociación Andaluza de Filosofía.
D. L: CA-834/97. - ISSN 1138-3569.
Publicado en https://elbuho.revistasaafi.es/

número m tal que $m \in 2\mathbb{N} \wedge m > 2$ y tal que m es un contraejemplo para CFG.

Si existe un número m tal que $m \in 2\mathbb{N} \wedge m > 2 \wedge \forall q, r \in \mathbb{N}(q + r = r + q = m \wedge q \in P \rightarrow r \notin P)$, entonces para todo número px tal que $px \in (P, \leq) \wedge x \in \omega \wedge x > 0$ existe un número n tal que $n \in K \wedge px + m = n \wedge \forall py, pz \in (P, \leq)\ y, z \in \omega(py + pz \neq m)$.

Sea $A(px) = \{n \in K / px \in (P, \leq) \wedge x \in \omega \wedge x > 0 \wedge \exists q, r \in \mathbb{N}\ m \in 2\mathbb{N}(q + r = m \wedge m > 2 \wedge px + m = n)\}$ por el esquema axiomático de especificación para todo número px tal que $px \in (P, \leq) \wedge x \in \omega \wedge x > 0$.

Así pues, por el axioma de extensionalidad existe un único conjunto A(px) para cada elemento px de $(P, \leq)$ tal que $px > 2$.

$A(px) \subset K$ para todo número px tal que $px \in (P, \leq) \wedge x \in \omega \wedge x > 0$ por la definición de K.

Sea $B(px) = \{n \in K / px \in (P, \leq) \wedge x \in \omega \wedge x > 0 \wedge \exists py, pz \in (P, \leq)\ m \in 2\mathbb{N}\qquad (y, z \in \omega \wedge py + pz = m \wedge m > 2 \wedge px + m = n)\}$ por el esquema axiomático de especificación para todo número px tal que $px \in (P, \leq) \wedge x \in \omega \wedge x > 0$.

Así pues, por el axioma de extensionalidad existe un único conjunto B(px) para cada elemento px de $(P, \leq)$ tal que $px > 2$.

$B(px) \subset K^*$ por la definición de K^*, dado que $B(px) = \{n \in K^* / px \in (P, \leq) \wedge x \in \omega \wedge x > 0 \wedge \exists py, pz \in (P, \leq)\ m \in 2\mathbb{N}(y, z \in \omega$

El Búho Nº 27
Revista Electrónica de la Asociación Andaluza de Filosofía.
D. L: CA-834/97. - ISSN 1138-3569.
Publicado en https://elbuho.revistasaafi.es/

$\wedge$ py + pz = m $\wedge$ m > 2 $\wedge$ px + m = n)} para todo número px tal que px $\in$ (P, $\leq$) $\wedge$ x $\in \omega \wedge$ x > 0 porque K* = K.

Si A(px) = {n $\in$ K / px $\in$ (P, $\leq$) $\wedge$ x $\in \omega \wedge$ x > 0 $\wedge$ $\exists$q, r $\in \mathbb{N}$ m $\in$ 2$\mathbb{N}$(q + r = m $\wedge$ m > 2 $\wedge$ px + m = n)} para todo número px tal que px $\in$ (P, $\leq$) $\wedge$ x $\in \omega \wedge$ x > 0, entonces A(px) = K – (px - 1 + 4) para todo número px tal que px $\in$ (P, $\leq$) $\wedge$ x $\in \omega \wedge$ x > 0 por el axioma de extensionalidad, pues n $\in$ K – (px - 1 + 4) $\leftrightarrow$ n $\in$ A(px) para todo número px tal que px $\in$ (P, $\leq$) $\wedge$ x $\in \omega \wedge$ x > 0 porque para cualesquiera números px y n tales que px, n $\in \mathbb{N} \wedge$ px $\in$ (P, $\leq$) $\wedge$ x $\in \omega \wedge$ n $\in$ 2$\mathbb{N}$C $\wedge$ x > 0 $\wedge$ n > 5 $\wedge$ px $\leq$ n existe por teorema un número m tal que m $\in$ 2$\mathbb{N} \wedge$ px + m = n, y para todo número m tal que m $\in$ 2$\mathbb{N}$ existen dos números q y r tales que q, r $\in \mathbb{N} \wedge$ q + r = m.

Por consiguiente, A(px) $\subseteq$ K – (px - 1 + 4) para todo número px tal que px $\in$ (P, $\leq$) $\wedge$ x $\in \omega \wedge$ x > 0 en virtud de X $\subset$ X para todo conjunto X.

Adviértase que A(px) = K para x = 1 porque K – (px - 1 + 4) = K – (p0 + 4) = K – (2 + 4) = K – 6 = K para x = 1, y n > 6 para todo número n tal que n $\in$ K por la definición de K.

En cambio, B(px) $\subsetneq$ K - (px - 1 + 4) para todo número px tal que px $\in$ (P, $\leq$) $\wedge$ x $\in \omega \wedge$ x > 0 porque, si CFG no es un enunciado verdadero en $\mathbb{N}$ por hipótesis, entonces para todo número px tal que px $\in$ (P, $\leq$) $\wedge$ x $\in \omega \wedge$ x > 0 existe un número n tal que n $\in$ K $\wedge$ px + m = n $\wedge$ m $\in$ 2$\mathbb{N} \wedge$ m > 2 $\wedge$ $\exists$q, r $\in \mathbb{N}$(q + r = r + q = m) $\wedge$ $\forall$py, pz $\in$ (P, $\leq$) , z $\in \omega$(py + pz $\neq$ m), es decir,

El Búho Nº 27
Revista Electrónica de la Asociación Andaluza de Filosofía.
D. L: CA-834/97. - ISSN 1138-3569.
Publicado en https://elbuho.revistasaafi.es/

para todo número px tal que px ∈ (P, ≤) ∧ x ∈ ω ∧ x > 0 existe un elemento de A(px) que no pertenece a B(px).

Por el axioma de extensionalidad, B(px) ≠ A(px) para todo número px tal que px ∈ (P, ≤) ∧ x ∈ ω ∧ x > 0.

En resumen, B(px) ⊊ A(px) para todo número px tal que px ∈ (P, ≤) ∧ x ∈ ω ∧ x > 0 porque A(px) = K - (px - 1 + 4) ∧ B(px) ⊂ K - (px - 1 + 4) ∧ B(px) ≠ K - (px - 1 + 4) para todo número px tal que px ∈ (P, ≤) ∧ x ∈ ω ∧ x > 0.

Si B(px) ⊊ A(px) ⊆ K para todo número px tal que px ∈ (P, ≤) ∧ x ∈ ω ∧ x > 0, entonces K* ≠ K porque, si ∀n ∈ K ∃px, py, pz ∈ (P, ≤) m ∈ 2ℕ(x, y, z ∈ ω ∧ x > 0 ∧ py + pz = m ∧ m > 2 ∧ px + m = n), entonces ∀n ∈ K ∃px ∈ (P, ≤) q, r ∈ ℕ m ∈ 2ℕ (x ∈ ω ∧ x > 0 ∧ q + r = m ∧ m > 2 ∧ px + m = n) —porque P ⊂ ℕ— y B(px) = A(px).

En propios términos, si CDG es un enunciado verdadero en ℕ, entonces K* = K porque para todo número n tal que n ∈ ℕ ∧ n ∈ 2ℕC ∧ n > 5 existen tres números px, py y pz tales que px, py, pz ∈ ℕ ∧ px + py + pz = n ∧ py + pz = m ∧ m ∈ 2ℕ ∧ m > 2 porque P ⊂ ℕ y existen tres números px, py y pz tales que px, py, pz ∈ (P, ≤) ∧ x, y, z ∈ ω ∧ px + py + pz = n ∧ py + pz = m ∧ m ∈ 2ℕ ∧ m > 2.

Si K* = K, entonces B(px) = A(px) para todo número px tal que px ∈ (P, ≤) ∧ x ∈ ω ∧ x > 0 por el axioma de extensionalidad, ya que, si K* = K, entonces para todo número n tal que n ∈ A(px) existen tres números px, py y pz tales que px, py, pz ∈

El Búho Nº 27
Revista Electrónica de la Asociación Andaluza de Filosofía.
D. L: CA-834/97. - ISSN 1138-3569.
Publicado en https://elbuho.revistasaafi.es/

$(P, \leq) \wedge x, y, z \in \omega \wedge x > 0 \wedge py + pz = m \wedge m \in 2\mathbb{N} \wedge m > 2 \wedge px + m = n$, de modo que $\forall n \in K[n \in A(px) \leftrightarrow n \in B(px)]$.

Si CFG no es un enunciado verdadero en $\mathbb{N}$, entonces $B(px) \neq A(px)$ para todo número px tal que $px \in (P, \leq) \wedge x \in \omega \wedge x > 0$, dado que $B(px) \neq K - (px - 1 + 4)$ y $A(px) = K - (px - 1 + 4)$ para todo número px tal que $px \in (P, \leq) \wedge x \in \omega \wedge x > 0$.

Por eliminación del condicional material (ECM), o modus ponens (MP), ya que CFG no es un enunciado verdadero en $\mathbb{N}$ por hipótesis, $B(px) \neq A(px)$ para todo número px tal que $px \in (P, \leq) \wedge x \in \omega \wedge x > 0$.

Por modus tollens (MT), $K^* \neq K$ en virtud de $K^* = K \rightarrow B(px) = A(px)$ para todo número px tal que $px \in (P, \leq) \wedge x \in \omega \wedge x > 0$.

Ahora bien, $K^* = K$ porque CDG es un enunciado verdadero en $\mathbb{N}$.

Por introducción del conjuntor (IC), o producto lógico (Prod), $K^* \neq K \wedge K^* = K$, lo cual infringe el principio de no contradicción (PNC).

Por introducción del condicional material (ICM), o teorema de deducción (TD), si CFG no es un enunciado verdadero en $\mathbb{N}$, entonces $K^* \neq K \wedge K^* = K$.

Por introducción del negador (IN), o reducción al absurdo (Abs), CFG es un enunciado verdadero en $\mathbb{N}$.

En conclusión, todo número n tal que $n \in \mathbb{Z} \wedge n \in 2\mathbb{N} \wedge n > 2$ satisface CFG.

El Búho Nº 27
Revista Electrónica de la Asociación Andaluza de Filosofía.
D. L: CA-834/97. - ISSN 1138-3569.
Publicado en https://elbuho.revistasaafi.es/

Queda probada la conjetura fuerte de Goldbach mediante prueba indirecta.

Adviértase que, si CFG es un enunciado verdadero en $\mathbb{N}$, entonces B(px) = A(px) para todo número px tal que px $\in$ (P, $\leq$) $\wedge$ x $\in \omega \wedge$ x > 0 porque para cualesquiera números px, n y m tales que px $\in$ (P, $\leq$) $\wedge$ x $\in \omega \wedge$ n, m $\in \mathbb{N} \wedge$ n $\in 2\mathbb{N}$C $\wedge$ m $\in 2\mathbb{N}$ $\wedge$ x > 0 $\wedge$ n > 5 $\wedge$ m > 2 $\wedge$ px + m = n existen dos números py y pz tales que py, pz $\in$ (P, $\leq$) $\wedge$ y, z $\in \omega \wedge$ py + pz = m —ya que K* = K porque CDG es un enunciado verdadero en $\mathbb{N}$—.

CDG es un corolario de CFG, pues para todo número n tal que n $\in \mathbb{N} \wedge$ n $\in 2\mathbb{N}$C $\wedge$ n > 5 existe un número m tal que m $\in 2\mathbb{N} \wedge$ m > 2 $\wedge$ py + pz = m $\wedge$ py, pz $\in$ (P, $\leq$) $\wedge$ y, z $\in \omega \wedge$ 3 + py + pz = n porque CFG es un enunciado verdadero en $\mathbb{N}$.

Evidentemente, la estrategia aplicada en la prueba indirecta posibilita la construcción de la siguiente prueba directa de CFG:

Para cualesquiera números n, x, y y z tales que n, x, y, z $\in \mathbb{N} \wedge$ n $\in 2\mathbb{N}$C $\wedge$ x, y, z $\in$ P $\wedge$ n > 5 $\wedge$ x > 2 $\wedge$ x + y + z = n existe un número m tal que m $\in 2\mathbb{N} \wedge$ m > 2 $\wedge$ y + z = m $\wedge$ x + m = n —puesto que x, y, z $\in$ P $\wedge$ x, n $\in 2\mathbb{N}$C $\wedge$ y, z $\geq$ 2—.

Sea A(x) = {n $\in \mathbb{N}$ / n $\in 2\mathbb{N}$C $\wedge$ x $\in$ P $\wedge$ n > 5 $\wedge$ x > 2 $\wedge$ $\exists$y, z $\in \mathbb{N}$ m $\in 2\mathbb{N}$ (x + y + z = n $\wedge$ y + z = m)} por el esquema axiomático de especificación para todo número x tal que x $\in$ P $\wedge$ x > 2.

Así pues, por el axioma de extensionalidad existe un único conjunto A(x) para cada elemento x de (P, $\leq$) tal que x > 2.

El Búho Nº 27
Revista Electrónica de la Asociación Andaluza de Filosofía.
D. L: CA-834/97. - ISSN 1138-3569.
Publicado en https://elbuho.revistasaafi.es/

Sea $B(x) = \{n \in \mathbb{N} \,/\, n \in 2\mathbb{N}C \wedge x \in P \wedge n > 5 \wedge x > 2 \wedge \exists y, z \in P$ $m \in 2\mathbb{N}\ (x + y + z = n \wedge y + z = m)\}$ por el esquema axiomático de especificación para todo número x tal que $x \in P \wedge x > 2$.

Así pues, por el axioma de extensionalidad existe un único conjunto B(x) para cada elemento x de $(P, \leq)$ tal que $x > 2$.

Si CFG no es un enunciado verdadero en $\mathbb{N}$, entonces $A(x) \neq B(x)$ para todo número x tal que $x \in P \wedge x > 2$ por el axioma de extensionalidad, puesto que, si CFG no es un enunciado verdadero en $\mathbb{N}$, entonces existe al menos un número n tal que $n \in A(x) \wedge n \notin B(x)$ para todo número x tal que $x \in P \wedge x > 2$ —dado que para cualesquiera números y y m tales que $y \in \mathbb{N} \wedge m \in 2\mathbb{N} \wedge y \leq m$ existe por teorema un número z tal que $z \in \mathbb{N} \wedge y + z = m$, pero existe un número m tal que $m \in 2\mathbb{N}$ y tal que $\forall y, z \in P(y + z \neq m)$ porque CFG no es un enunciado verdadero en $\mathbb{N}$ por hipótesis—.

Por MT, CFG es un enunciado verdadero en $\mathbb{N}$ porque CDG es un enunciado verdadero en $\mathbb{N}$ y $A(x) = B(x)$ por CDG para todo número x tal que $x \in P \wedge x > 2$.

En conclusión, todo número n tal que $n \in \mathbb{Z} \wedge n \in 2\mathbb{N} \wedge n > 2$ satisface CFG.

Queda probada la conjetura fuerte de Goldbach mediante una prueba directa que cabe resumir en la siguiente exposición informal:

Para todo número impar n tal que $n > 5$ existen tres números primos x, y y z tales que $x + y + z = n$ por CDG.

El Búho Nº 27
Revista Electrónica de la Asociación Andaluza de Filosofía.
D. L: CA-834/97. - ISSN 1138-3569.
Publicado en https://elbuho.revistasaafi.es/

Si n es un número impar tal que $n > 5 \wedge x + y + z = n$ para tres números primos x, y y z, entonces al menos uno de estos sumandos primos es un número impar.

Si x es un número primo impar, entonces $x > 2$.

Si n es un número impar tal que $n > 5 \wedge x + y + z = n$ para tres números primos x, y y z tales que $x > 2$, entonces existe un número par m tal que $y + z = m \wedge m > 2$ —porque $y, z \geq 2$—.

Si A(x) es el único conjunto cuyos elementos son, exclusivamente, todos los números impares n tales que $n > 5 \wedge x + y + z = n$ para tres números naturales x, y y z tales que

$x > 2 \wedge y + z = m$, tales que x es un número primo y tales que m es un número par, y B(x) es el único conjunto cuyos elementos son, exclusivamente, todos los números impares n tales que $n > 5 \wedge x + y + z = n$ para tres números primos x, y y z tales que $x > 2 \wedge y + z = m$ y tales que m es un número par, entonces A(x) = B(x) para todo número primo x tal que $x > 2$ por CDG.

Si CFG no es un enunciado verdadero en $\mathbb{N}$, entonces $A(x) \neq B(x)$ para todo número primo x tal que $x > 2$ porque existe al menos un elemento de A(x) que no pertenece a B(x) para todo número primo x tal que $x > 2$.

Por MT, CFG es un enunciado verdadero en $\mathbb{N}$, pues A(x) = B(x) para todo número primo x tal que $x > 2$ por CDG, que es un enunciado verdadero en $\mathbb{N}$.

El Búho Nº 27
Revista Electrónica de la Asociación Andaluza de Filosofía.
D. L: CA-834/97. - ISSN 1138-3569.
Publicado en https://elbuho.revistasaafi.es/

En conclusión, todo número entero que es un número par mayor que 2 satisface CFG.

Queda probado que CFG es un enunciado verdadero en $\mathbb{N}$.