El Búho Nº 29
Revista Electrónica de la Asociación Andaluza de Filosofía.
D. L: CA-834/97. - ISSN 1138-3569.
Publicado en https://elbuho.revistasaafi.es/

ZERMELO SOBRE EL AJEDREZ

Laureano Luna Cabañero

Ernst Zermelo (1871-1953), matemático alemán, fue uno de los creadores de la teoría axiomática de conjuntos. La axiomática conjuntista más usada hoy lleva el nombre de ZF por Zermelo y Fraenkel, o ZFC si se añade a ZF el axioma de elección, que Zermelo utilizó en un famoso artículo de 1908 para demostrar que todo conjunto puede ser bien ordenado; en ese mismo año, Zermelo propuso la primera versión de lo que evolucionaría gracias a Fraenkel y Skolem hasta convertirse en la teoría ZFC. Hoy se reconoce además que Zermelo había descubierto en Gotinga antes que Russell la conocida paradoja del conjunto de todos los conjuntos que no se pertenecen a sí mismos. En 1913 apareció el artículo de Zermelo sobre el ajedrez que traducimos, en el que suele considerarse que demuestra el llamado «teorema de Zermelo» sobre teoría de juegos, considerado el primer teorema de esa disciplina matemática.

De las versiones del teorema, una de las más sencillas dice: en un juego finito, de información perfecta, en el que se enfrentan dos jugadores y en el que no interviene el azar, o bien un jugador tiene una estrategia ganadora o bien ambos tienen una estrategia que les permite forzar tablas. En efecto, Zermelo construye en el artículo dos conjuntos de continuaciones del juego a partir de una posición dada q: uno, que puede ser vacío, ofrece a las blancas una estrategia ganadora a partir de q; si ese conjunto es vacío, existe otro, quizá vacío, que permite a las blancas forzar tablas; si este

El Búho Nº 29
Revista Electrónica de la Asociación Andaluza de Filosofía.
D. L: CA-834/97. - ISSN 1138-3569.
Publicado en https://elbuho.revistasaafi.es/

segundo conjunto también es vacío, las negras tienen una estrategia ganadora a partir de *q* y las blancas no pueden más que demorar la derrota hasta un número máximo de movimientos. Como la misma situación se da para las negras, las alternativas posibles son que las blancas tengan una posición ganadora, que la tengan las negras o que ambos jugadores puedan forzar tablas.

Dadas las características del juego, el teorema es casi trivial. Sin embargo, lo que interesaba a Zermelo era mostrar cómo puede entenderse el ajedrez usando conceptos conjuntistas aplicados además a un contexto finito; y tiene el mérito de haber inaugurado la teoría de juegos, que habría de convertirse en una rama floreciente de las matemáticas gracias al trabajo de matemáticos como el famoso John Nash, Morgenstern o Von Neumann.

SOBRE UNA APLICACIÓN DE LA TEORÍA DE CONJUNTOS A LA TEORÍA DEL AJEDREZ

ERNST ZERMELO

[Zermelo, E. 1913. Über eine Anwendung der Mengenlehre auf die Theorie des Schachspiels, *Proc. Fifth Congress Mathematicians*, (Cambridge 1912), Cambridge University Press 1913, pp. 501-504][1]

Traducción de Laureano Luna Cabañero

[1] Texto original alemán en https://webdocs.cs.ualberta.ca/~hayward/396/asn/zermelo.pdf. N. del T.

El Búho Nº 29
Revista Electrónica de la Asociación Andaluza de Filosofía.
D. L: CA-834/97. - ISSN 1138-3569.
Publicado en https://elbuho.revistasaafi.es/

Las consideraciones siguientes son independientes de las reglas concretas del juego del ajedrez y valen en principio para cualquier juego intelectual no de azar semejante, en el que se enfrentan dos jugadores. Pero, por mor de concreción, preferimos ejemplificar aquí con el ajedrez, siendo éste el juego más conocido de este tipo. No se trata de exponer aquí un método para la práctica del juego sino de contestar a esta pregunta:

¿Puede determinarse de manera matemáticamente objetiva el valor que una posición posible en el juego tiene para uno de los jugadores y puede determinarse, o al menos definirse, cuál es el mejor movimiento posible para él sin recurrir a construcciones con matiz psicológico y subjetivo como la del «jugador perfecto»?

Que esto es posible al menos en algunos casos lo revelan esos problemas de ajedrez, es decir, ejemplos de posiciones, en los que cabe *demostrar* que el jugador que mueve puede forzar el mate en un número predeterminado de movimientos. Creo que merece la pena investigar si una tal valoración de la posición es teóricamente concebible y tiene sentido también en aquellos casos en los que el análisis de la situación encuentra un obstáculo, insalvable en la práctica, en el elevado número de las posibles continuaciones del juego. Y creo que esta averiguación es necesaria para sentar el fundamento de la teoría de los finales de juego y de las aperturas, tal como se encuentra expuesta en los libros de enseñanza del ajedrez. El método utilizado en las líneas que siguen para la solución de ese problema se ha tomado de la teoría de conjuntos y del cálculo lógico, y revela la utilidad de esas disciplinas matemáticas también en casos que involucran casi exclusivamente totalidades *finitas.*

El Búho Nº 29
Revista Electrónica de la Asociación Andaluza de Filosofía.
D. L: CA-834/97. - ISSN 1138-3569.
Publicado en https://elbuho.revistasaafi.es/

Como el número de escaques y de piezas es finito, es también finito el conjunto *P* de las posiciones posibles p_0, p_1, p_2, ..., p_t, entre las que dos posiciones por lo demás iguales deben distinguirse también atendiendo a cuál es el jugador al que toca mover, a si uno de los bandos ha enrocado ya, a si algún peón ha coronado, etc. Sea entonces *q* una de esas posiciones; entonces para *q* hay finales posibles f_q [2]$= (q, q_1, q_2, \ldots)$, cada uno de ellos una secuencia de posiciones que, partiendo de *q,* suceden unas a otras de acuerdo con las reglas del juego, de tal manera que cualquier posición q_n de entre esas sucede a la posición q_{n-1} a través de un movimiento permitido alternativamente de las blancas o las negras. Cada uno de esos finales de juego f_q termina en una posición de mate o de ahogado[3], o, al menos teóricamente, continúa indefinidamente y en este caso el resultado de la partida tendría que considerarse indeterminado o sería tablas. El conjunto Q de todos esos posibles finales de juego f_q que parten de *q* es un subconjunto, finito o infinito, pero bien definido, del conjunto P^a que contiene todas las secuencias enumerables de elementos *p* del conjunto *P.*

Algunos de esos finales de juego f_q pueden conducir a la victoria de las blancas en no más de *r* movimientos (entendiendo por «movimiento» el paso de una posición p_{n-1} a una posición p_n, es decir una media jugada, no una jugada completa), aunque en general

2 Aunque en algunos casos modificamos por conveniencia la notación de Zermelo, mantenemos nuestra notación coherente a lo largo de la traducción, N, del T.

3 «Ahogado» o «rey ahogado» denota la situación en la que un jugador, cuyo rey no está en jaque, no puede hacer ninguna jugada permitida, lo que da lugar a tablas. N. del T.

El Búho Nº 29
Revista Electrónica de la Asociación Andaluza de Filosofía.
D. L: CA-834/97. - ISSN 1138-3569.
Publicado en https://elbuho.revistasaafi.es/

esto dependerá de cómo jueguen las negras. Pero ¿cómo debe ser una posición *q* para que las blancas puedan forzar el mate en no más de *r* movimientos, con independencia de cómo jueguen las negras? Afirmo que la condición suficiente y necesaria para eso es la existencia de un subconjunto no vacío $S_r(q)$ del conjunto Q tal que:

1. Todos los elementos f_q del conjunto $S_r(q)$ terminan con la victoria de las blancas en no más de *r* movimientos, de tal manera que cada secuencia f_q contiene como mucho $r+1$ términos, lo que implica que $S_r(q)$ es siempre finito.

2. Si $f_q = (q, q_1, q_2, \ldots)$ es un elemento cualquiera de $S_r(q)$ y si q_n es un término cualquiera de f_q, que se da tras un movimiento de las negras y que será un término par o impar de f_q según quién juegue en *q*, y si, finalmente, q'_n es una variante posible, porque las negras desde q_{n-1} podrían jugar tanto q_n como q'_n, entonces $S_r(q)$ contiene al menos un elemento $f_{q'n} = (q, q_1, \ldots, q_{n-1}, q'_n, \ldots)$, que tiene en común con f_q los primeros *n* términos. De hecho, en ese y solo en ese caso, pueden las blancas empezar con un elemento cualquiera f_q de $S_r(q)$ y, si las negras juegan q'_n en vez de q_n, contestar con un correspondiente q'_{n+1} [4] que asegure su victoria en no más de *r* movimientos.

Ciertamente, puede haber más de un subconjunto $S_r(q)$ de *Q* pero la unión de cualquier par de ellos cumplirá las condiciones 1 y 2, y también lo hará la unión $U(S_r(q))$ de todos ellos, que está bien

4 En el original no aparece el '+1', lo que debe de ser una errata. N del T.

definida por r y q, y que será diferente de $\varnothing$, es decir, que tendrá al menos un elemento, con tal que de que realmente exista un $S_r(q)$. En consecuencia, que $U(S_r(q)) \neq \varnothing$ es la condición necesaria y suficiente para que las blancas puedan asegurarse la victoria a partir de q en no más de r movimientos. Si $r < r'$, entonces $U(S_r(q))$ es subconjunto de $U(S_{r'}(q))$, puesto que todo conjunto $S_r(q)$ satisface las condiciones impuestas a los conjuntos $S_{r'}(q)$, de modo que debe estar incluido en $U(S_{r'}(q))$; y si m es el menor número para el que $U(S_m(q)) \neq \varnothing$, entonces $S^*(q) = U(S_m(q))$ es la intersección de todos los $U(S_r(q))$ y contiene todas aquellas continuaciones del juego a partir de q que permiten a las blancas ganar en un número mínimo de movimientos. Para esos valores mínimos $m = m_q$ hay un valor máximo $T \leq t$, que no depende de q y donde $t+1$ el número de todas las posiciones posibles, de modo que la condición necesaria y suficiente para que exista algún $S_r(q)$ no vacío y las blancas puedan asegurarse la victoria a partir de q es que $S(q) = U(S_T(q)) \neq \varnothing$. Si desde una posición q es posible forzar la victoria, entonces, como vamos a mostrar, es posible hacerlo en no más de t movimientos. De hecho, todo final $f_q = (q, q_1, q_2, \ldots, q_n)$ con $n > t$ contiene una posición $q_a = q_b$ repetida y las blancas podrían haber jugado la primera vez que esa posición se dio tal como lo hacen en la segunda y así haber ganado en menos de n movimientos; por tanto, $m \leq t$.

Si, en cambio, $S(q) = \varnothing$, entonces las blancas pueden como mucho, si las negras juegan bien, conseguir tablas pero también podrían estar en una posición perdedora y entonces intentarán demorar el mate todo lo posible. Si las blancas tienen la posibilidad de aguantar

El Búho Nº 29
Revista Electrónica de la Asociación Andaluza de Filosofía.
D. L: CA-834/97. - ISSN 1138-3569.
Publicado en https://elbuho.revistasaafi.es/

hasta el *j*-ésimo movimiento, entonces tiene que haber un subconjunto $Z_j(q)$ de Q tal que

1. En ninguno de los finales contenidos en $Z_j(q)$ pierden las blancas antes del j-ésimo movimiento.

2. Si f_q es un elemento cualquiera de $Z_j(q)$ y en f_q la posición q_n puede ser reemplazada por la posición q'_n como consecuencia de un movimiento permitido de las negras, entonces $Z_j(q)$ contiene al menos un elemento de la forma

$$f_{q'n} = (q, q_1, q_2 \ldots, q_{n-1}, q'_n, \ldots),$$

que tiene es igual que f_q [5] hasta el *n*-ésimo elemento y después continúa con q'_n. También los conjuntos $Z_j(q)$ son todos subconjuntos de su unión $U(Z_j(q))$, que queda unívocamente determinada por j y q, y que tiene la misma propiedad que Z_j [6] mismo, y para cada $j < j'$, es $U(Z_j(q))$ subconjunto de $U(Z_{j'}(q))$. Para los números j para los que $U(Z_j(q))$ es diferente de $\varnothing$ vale que o bien carecen de máximo o bien $j \leq J$ [7] $\leq T \leq t$, dado que el contrario, si puede asegurarse la victoria, debe poder hacerlo en no más de T movimientos. Así, las blancas pueden asegurarse tablas si y solo si $U(Z_{T+1}(q)) \neq \varnothing$. Si no pueden asegurarse tablas, entonces pueden,

---

5 En el original aparece «*q*», lo que seguramente es una errata. N del T.

6 Debe ententenderse $Z_j(q)$. N del T.

7 Debe entenderse que J es el máximo de los números j. N del T.

mediante $Z^*(q) = U(Z_J(q))$ [8], retrasar la derrota al menos durante $J \leq T$ movimientos. Como todos los conjuntos $S_r(q)$ satisfacen las condiciones impuestas a los conjuntos $Z_j(q)$, el conjunto $U(S_r(q))$ es subconjunto de $U(Z_j(q))$ y $S(q)$ es subconjunto de $Z(q)$ [9]. El resultado de nuestras consideraciones es, por tanto, el siguiente:

A cada posición posible del juego corresponden dos conjuntos bien definidos $S(q)$ y $Z(q)$, subconjuntos del conjunto Q de todos los finales de juego que empiezan con q, y de esos dos el primero es subconjunto del segundo. Si $S(q)$ es distinto de $\emptyset$, entonces las blancas pueden forzar su victoria con independencia de cómo jueguen las negras y pueden hacerlo en no más de m movimientos por medio de un subconjunto $S_m(q)$ de $S(q)$ pero no pueden hacerlo con seguridad en menos movimientos. Si $S(q) = \emptyset$ pero $Z(q) \neq \emptyset$, entonces las blancas pueden al menos hacer tablas mediante los finales de juego contenidos en $Z(q)$. Cuando $Z(q)$ es vacío, las blancas, si el contrario juega bien, pueden solamente demorar la derrota hasta el J-ésimo movimiento mediante un conjunto bien definido $Z^*(q)$ de continuaciones del juego. En cualquier caso, solamente las partidas contenidas en $S^*(q)$ o $Z^*(q)$ pueden considerarse «correctas» desde el punto de vista de las blancas; mediante cualquier otra continuación, las blancas, si están en posición ganadora, dejarían escapar o demorarían la victoria, si el contrario juega bien; y si no están en posición ganadora, harían posible o acelerarían su derrota. Para las negras valen

[8] Modificamos el subíndice de estos subconjuntos de Q que hasta ahora hemos consignado como $Z_j(q)$ porque lo modifica Zermelo. N. del T.

[9] Hay que entender, por analogía con $S(q)$, que $Z(q) = U(Z_T(q))$. N. del T.

observaciones enteramente análogas y las partidas que deberían contar como partidas jugadas correctamente hasta el final a partir de q son las que satisfacen simultáneamente las condiciones de cada bando, y éstas forman un subconjunto bien definido $W(q)$ de Q.

Los números t y T son independientes de la posición y quedan determinados solo por las reglas del juego. A cada posición del juego corresponde un número $m = m_q$ o un número $J = J_q$, ninguno mayor que T, según sea que las blancas pueden forzar su victoria en m movimientos, pero no en menos, o que pueden hacerlo las negras en J pero no en menos movimientos. La teoría específica de este juego debería calcular esos números o al menos delimitar sus valores entre unos mínimos y unos máximos, lo que hasta ahora no se ha conseguido más que en los «problemas de mate en n jugadas» o en los finales de partida propiamente dichos. La cuestión de si la posición inicial p_0 es ya una posición ganadora para alguno de los bandos es por ahora un problema abierto. Si se le diera una solución rigurosa, entonces ciertamente el ajedrez perdería su condición de *juego.*